

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):**

**Pregunta 1.** Dadas las matrices  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , se pide:

- (1 punto) Calcular las matrices  $A$  y  $B$  que verifican  $5A + B = C$  y  $2A - 2B = D$ .
- (1 punto) Discutir, en función del parámetro  $\alpha$ , el sistema:

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Pregunta 2.** La altura media de un niño de 2 años recién cumplidos sigue una distribución normal con media 88 cm y desviación típica 8 cm:

- (1 punto) Calcule la probabilidad de que un niño de 2 años elegido al azar tenga entre 86 y 92 cm de altura.
- (1 punto) Determine a partir de qué altura un niño de 2 años tiene una altura superior al 90% de los niños.

**Pregunta 3.** Se pide:

- (1 punto) Analizar el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule la integral indefinida:

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx.$$

b2) Resuelva la integral definida:

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx.$$

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :**

**Pregunta 4.1.** Sean el plano  $\pi$  de ecuación  $2x - 2y + z = 1$  y la recta  $r$  dada por:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases} .$$

- a) (1 punto) Determine el ángulo que forman la recta y el plano.
- b) (1 punto) Halle los puntos de la recta  $r$  que disten 1 del plano  $\pi$ .

**Pregunta 4.2.** Dados los puntos  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 0)$  y  $D(0, 1, 1)$ . Se pide:

- a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos no son coplanarios.
- b) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

---

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :**

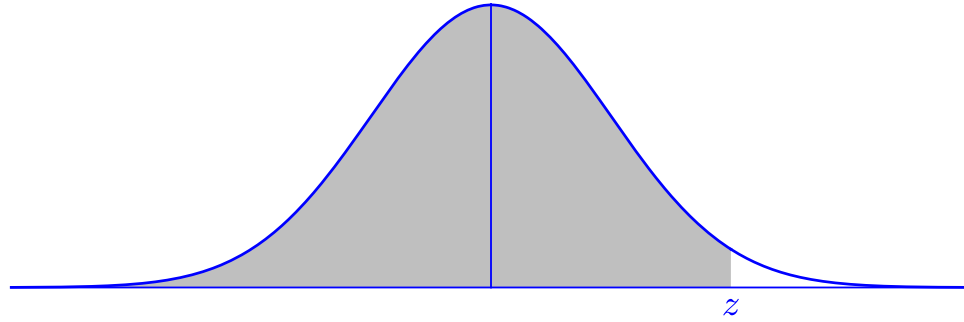
**Pregunta 5.1.** Para la función  $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 24}{4x^3 - x^2 + 12}$ , se pide:

- a) (1 punto) Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- b) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en  $x = 0$ .

**Pregunta 5.2.** Sean  $x$  e  $y$  dos números reales positivos tales que su producto es 15 ( $xy = 15$ ).

- a) (1 punto) Determine los valores de  $x$  e  $y$  para que su suma ( $S = x + y$ ) sea mínima.
- b) (1 punto) ¿Existen valores de  $x$  e  $y$  para que dicha suma sea máxima? Razone la respuesta.

## DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si  $Z$  tiene distribución  $N(0, 1)$ ,  $P(Z < 0,45) = 0,6736$ .

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990



## MATEMÁTICAS II

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

**Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

---

1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.

a) Probabilidad correcta: 0.2 puntos. Uso correcto de  $(Z - \mu)/\sigma$ : 0.3 puntos. Uso correcto de la tabla: 0.2 puntos. Cálculo correcto: 0.3 puntos.

b) Planteamiento: 0.3 puntos. Uso de la tabla: 0.2 puntos. Uso correcto de  $(Z - \mu)/\sigma$ : 0.2 puntos. Cálculo correcto: 0.3 puntos.

3.

a) Derivación correcta: 0.5 puntos. Análisis de la monotonía: 0.5 puntos.

b1) Uso de integración por partes: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b2) Cálculo de la integral: 0.7 puntos. Regla de Barrow: 0.3 puntos.

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Se restan 0.2 puntos si no se da el ángulo suplementario.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Se restan 0.2 puntos si solo se da un punto.

4.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Se restan 0.2 puntos si el volumen se da con signo negativo.

5.1.

a) Cada uno de los límites: 0.5 puntos (0.3 puntos el planteamiento, 0.2 puntos la resolución).

b) Planteamiento (ecuación recta tangente): 0.4 puntos. Ecuación correcta de la recta tangente: 0.6 puntos (0.4 puntos la derivada, 0.2 puntos el resto).

5.2.

a) Planteamiento: 0.6 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

b) Indicar que no tiene máximo: 0.5 puntos. Justificación: 0.5 puntos.

**MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES**  
**(Documento de trabajo orientativo)**

1.

a)  $A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  y  $B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ .

b) El sistema es

$$\begin{cases} x + \alpha y & = & 1 \\ (1 + \alpha)x + 2y & = & 0 \end{cases},$$

que es un sistema compatible determinado si  $\alpha \neq 1, -2$  e incompatible para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = -2$ .

2.

a) La altura  $X \sim N(88, 8)$ .  $P(86 < X < 92) = P(-1/4 < Z < 1/2) = P(Z < 1/2) + P(Z < 1/4) - 1$  donde  $Z \sim N(0, 1)$ . El resultado es, usando la tabla, 0.2902.

b) Mirando la tabla  $0.9 < P(Z < 1.29) = 0.9015$ , entonces la altura correspondiente a dicha probabilidad es  $88 + 8 \cdot 1.29 = 98.32$ .

3.

a) El numerador de la derivada

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

se anula en  $x = \pm 2$ . Por lo tanto  $f(x)$  es creciente en  $(-2, 2)$  y decreciente en  $(-\infty, -2)$  y en  $(2, \infty)$ .

b1) Integración por partes:  $\int x \sin(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{4} + C$ .

b2)  $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) \right]_0^2 = \frac{1}{2} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(4) = \frac{\ln(2)}{2}$ .

4.1.

a) El vector normal del plano es  $\vec{v} = (2, -2, 1)$  y la recta tiene vector director  $\vec{w} = (2, -2, -1)$ . Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{7}{9},$$

lo que da  $\theta = 38.94^\circ$ . El ángulo es el suplementario  $90^\circ - \theta = 51.06^\circ$ .

b) La recta  $r$  se parametriza como  $(2t, -2 - 2t, 1 - t)$ . Si imponemos

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2t - 2(-2 - 2t) + (1 - t) - 1|}{3} = \frac{|7t + 4|}{3} = 1$$

queda  $7t + 4 = \pm 3$ , luego  $t = -1$ ,  $t = -\frac{1}{7}$ . Los puntos de la recta  $r$  a distancia 1 del plano  $\pi$  son:  $(-2, 0, 2)$  y  $(-\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{8}{7})$ .

#### 4.2.

a) Los 4 puntos no son coplanarios porque el siguiente determinante es distinto de cero:

$$\left| \begin{array}{ccc} \vec{CA} & \vec{CB} & \vec{CD} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante del apartado anterior, es decir,  $\frac{1}{6}$ .

---

#### 5.1.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$  (coeficientes términos dominantes en  $\infty$ )  $= \frac{3}{4}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$  (sustitución directa en 0)  $= \frac{-24}{12} = -2$ .

b) El punto de tangencia es  $P(0, f(0))$  donde  $f(0) = -2$ . Como

$$f'(x) = \frac{(9x^2 + 2)(4x^3 - x^2 + 12) - (3x^3 + 2x - 24)(12x^2 - 2x)}{(4x^3 - x^2 + 12)^2},$$

la pendiente de la recta tangente en  $x = 0$  es

$$m = f'(0) = \frac{2 \cdot 12 - (-24) \cdot 0}{12^2} = \frac{24 - 0}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}.$$

La ecuación de la recta tangente es  $y = \frac{1}{6}x - 2$ .

---

#### 5.2.

a) Despejando de la restricción, tenemos que la función objetivo es  $S(x) = x + \frac{15}{x}$ . Buscamos sus puntos críticos:

$$S'(x) = 1 - \frac{15}{x^2} = 0,$$

$$1 - \frac{15}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{15} \quad (\text{Descartamos } -\sqrt{15} \text{ pues } x > 0).$$

Como  $S'(x) < 0$  en  $(0, \sqrt{15})$  y  $S'(x) > 0$  en  $(\sqrt{15}, \infty)$ , la función es decreciente y creciente, respectivamente. Por lo tanto en  $x = \sqrt{15}$  la función tiene un mínimo.

b) Como  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \infty$ , la función  $S(x)$  no tiene máximo y el mínimo hallado es absoluto.